根轨迹例题

4-4 已知单位负反馈控制系统开环传递函数如下，试概略画出相应的闭环根轨迹图（要求算出起始角 θ_{pi}）。

(1) $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{(s+1+\mathrm{j}2)(s+1-\mathrm{j}2)}$；

(2) $G(s)=\dfrac{K^*(s+20)}{s(s+10+\mathrm{j}10)(s+10-\mathrm{j}10)}$。

解 本题可根据根轨迹绘制法则求出起始角，并绘制系统的概略根轨迹图。

(1) $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{(s+1+\mathrm{j}2)(s+1-\mathrm{j}2)}$

① 根轨迹的分支和起点与终点。由于 $n=2$，$m=1$，$n-m=1$，故根轨迹有两条分支，其起点分别为 $p_1=-1-\mathrm{j}2$，$p_2=-1+\mathrm{j}2$，其终点分别为 $z_1=-2$ 和无穷远处。

② 实轴上的根轨迹。实轴上的根轨迹分布区为$[-2,-\infty)$。

③ 根轨迹的分离点。根轨迹的分离点坐标满足

$$\frac{1}{d+1+\mathrm{j}2}+\frac{1}{d+1-\mathrm{j}2}=\frac{1}{d+2}$$

即 $$d^2+4d-1=0$$

解得 $$d_1=-4.236,\quad d_2=0.236\text{(舍去)}$$

故分离点的坐标为 $d=-4.236$。

④ 根轨迹的起始角。

$$\theta_{p_1}=180^\circ+\varphi_{z_1p_1}-\theta_{p_2p_1}=180^\circ+\arctan2-90^\circ=153.43^\circ$$

$$\theta_{p_2}=-153.43^\circ$$

根据以上几点，可以画出概略根轨迹如图 4-4-1 所示。

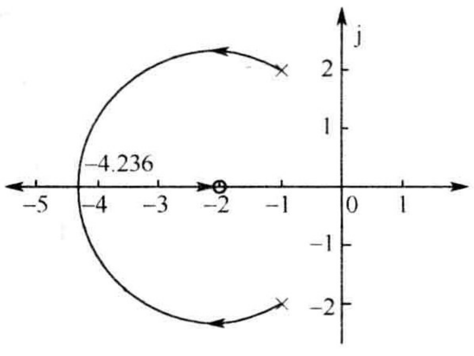

图 4-4-1 $1+\dfrac{K^*(s+2)}{(s+1+\mathrm{j}2)(s+1-\mathrm{j}2)}=0$ 概略根轨迹图

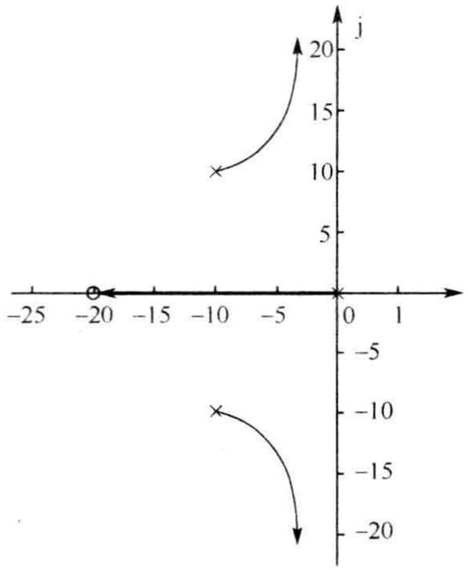

图 4-4-2 $1+\dfrac{K^*(s+20)}{s(s+10+\mathrm{j}10)(s+10-\mathrm{j}10)}=0$ 概略根轨迹图

(2) $G(s)=\dfrac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}$

① 根轨迹的分支和起点与终点。由于 $n=3,m=1,n-m=2$,故根轨迹有三条分支,其起点分别为 $p_1=-10-j10$,$p_2=-10+j10$,$p_3=0$,其终点分别为 $z_1=-20$ 和无穷远处。

② 实轴上的根轨迹。实轴上的根轨迹分布区为[0,−20]。

③ 根轨迹的渐近线。

$$\sigma_a=\frac{-10-j10-10+j10+20}{3-1}=0, \qquad \varphi_a=\pm\frac{\pi}{2}$$

④ 根轨迹的起始角。

$$\theta_{p_1}=180^\circ+\varphi_{z_1p_1}-\theta_{p_2p_1}-\theta_{p_3p_1}=180^\circ-\arctan1+\arctan1=180^\circ$$

$$\theta_{p_2}=180^\circ+\varphi_{z_1p_2}-\theta_{p_1p_2}-\theta_{p_3p_2}=180^\circ+45^\circ-135^\circ-90^\circ=0^\circ$$

根据以上几点,可以画出概略根轨迹如图 4-4-2 所示,仿真图示于图 4-4-3、图 4-4-4。

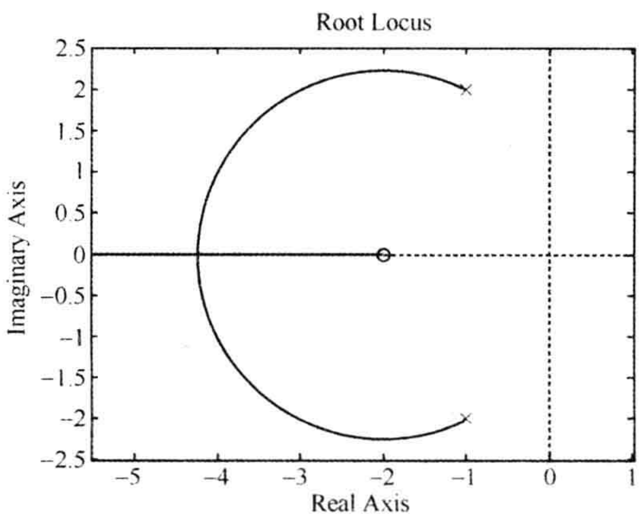

图 4-4-3　$1+\dfrac{K^*(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}=0$

根轨迹图(MATLAB)

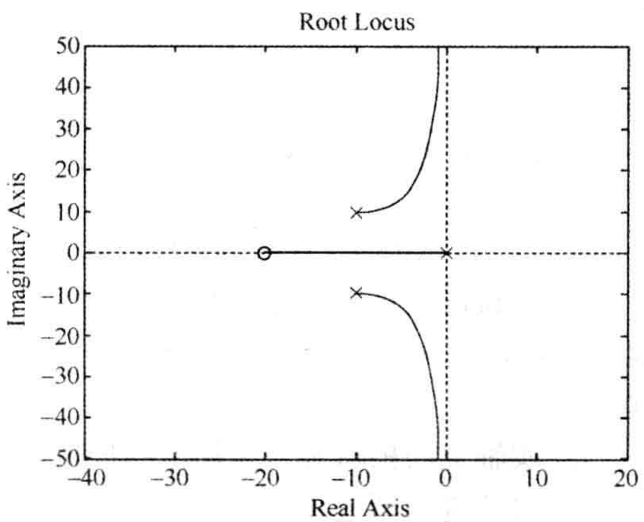

图 4-4-4　$1+\dfrac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}=0$

根轨迹图(MATLAB)

4-7 已知开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

试概略画出闭环系统根轨迹图。

解 本题可应用根轨迹绘制法则，绘制对称系统的概略根轨迹图，特别注意复平面上的分离点。

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}=\frac{K^*}{s(s+4)(s+2+\mathrm{j}4)(s+2-\mathrm{j}4)}$$

① 根轨迹的分支和起点与终点。由于 $n=4, m=0, n-m=4$，故根轨迹有四条分支，其起点分别为 $p_1=0, p_2=-4, p_3=-2+\mathrm{j}4, p_4=-2-\mathrm{j}4$，其终点都为无穷远处。

② 实轴上的根轨迹。实轴上的根轨迹分布区间$[0,-4]$。

③ 根轨迹的渐近线。

$$\sigma_a=\frac{-4-2-\mathrm{j}4-2+\mathrm{j}4}{4-0}=-2, \qquad \varphi_a=\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$$

④ 根轨迹的分离点。根轨迹的分离点坐标满足

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+4}+\frac{1}{d+2-\mathrm{j}4}+\frac{1}{d+2+\mathrm{j}4}=0$$

即

$$d^3+6d^2+18d+20=0$$

解得

$$d_1=-2, \qquad d_{2,3}=-2\pm\mathrm{j}\sqrt{6}=-2\pm\mathrm{j}2.45$$

⑤ 根轨迹与虚轴的交点。系统的闭环特征方程式为

$$D(s)=s(s+4)(s^2+4s+20)+K^*=s^4+8s^3+36s^2+80s+K^*=0$$

令 $s=\mathrm{j}\omega$，并代入上式可得

$$(\mathrm{j}\omega)^4+8(\mathrm{j}\omega)^3+36(\mathrm{j}\omega)^2+80(\mathrm{j}\omega)+K^*=(\omega^4-36\omega^2+K^*)+\mathrm{j}\omega(80-8\omega^2)=0$$

即

$$\begin{cases}\omega^4-36\omega^2+K^*=0\\ 80-8\omega^2=0\end{cases}$$

解得

$$\omega=\pm\sqrt{10}=\pm3.16, \qquad K^*=260$$

故根轨迹与虚轴的交点坐标为 $\omega=\pm3.16, K^*=260$。

根据以上分析，画出系统的闭环根轨迹如图 4-7-1 所示。

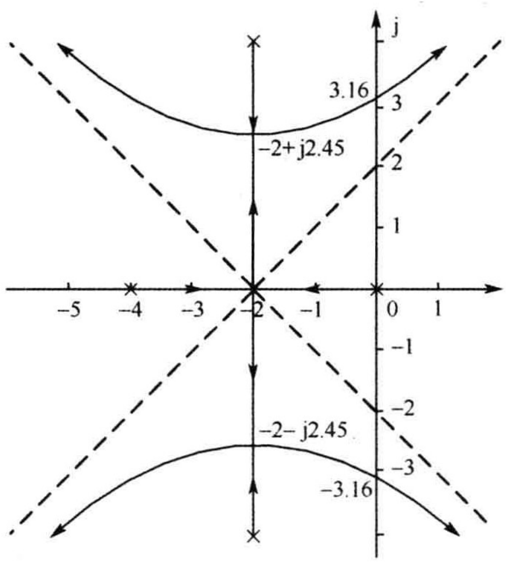

图 4-7-1 $1+\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}=0$ 概略根轨迹图

4-12 设系统开环传递函数如下，试画出 b 从零变到无穷时的根轨迹图。

(1) $G(s)=\dfrac{20}{(s+4)(s+b)}$；

(2) $G(s)=\dfrac{30(s+b)}{s(s+10)}$。

解 本题考察参数根轨迹的绘制。

(1) $G(s)=\dfrac{20}{(s+4)(s+b)}$

系统的闭环特征多项式为

$$D(s)=(s+4)(s+b)+20=s^2+4s+20+b(s+4)=0$$

上式可等价表示为

$$1+G_1(s)=0$$

其中等效开环传递函数

$$G_1(s)=\frac{b(s+4)}{s^2+4s+20}=\frac{b(s+4)}{(s+2+\mathrm{j}4)(s+2-\mathrm{j}4)}$$

① 根轨迹的分支和起点与终点。由于 $n=2,m=1,n-m=1$，故根轨迹有两条分支，其起点分别为 $p_1=-2-\mathrm{j}4,p_2=-2+\mathrm{j}4$，其终点分别为 $z_1=-4$ 和无穷远处。

② 实轴上的根轨迹。实轴上的根轨迹分布区为$[-4,-\infty)$。

③ 根轨迹的分离点。根轨迹的分离点坐标满足

$$\frac{1}{d+2+\mathrm{j}4}+\frac{1}{d+2-\mathrm{j}4}=\frac{1}{d+4}$$

应有 $d^2+8d-4=0$，解得

$$d_1=-8.47,\qquad d_2=0.47(\text{舍去})$$

④ 根轨迹的起始角。

$$\theta_{p_1}=180^\circ+\varphi_{z_1p_1}-\theta_{p_2p_1}=180^\circ+\arctan2-90^\circ=153.43^\circ$$

$$\theta_{p_2}=-153.43^\circ$$

根据以上几点，可以画出概略根轨迹如图 4-12-1 所示。其仿真图如图 4-12-2 所示。实际上，可以类似题 4-6 的证明，本题根轨迹是以$(-4,\mathrm{j}0)$为圆心、以$\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=4.47$为半径的圆的一部分。而分离点 $d=-8.47$ 处的 b 值可由模值条件求出：

$$b=\frac{\prod\limits_{i=1}^{2}|d-p_i|}{|d-z|}=\frac{6.47^2+4^2}{4.47}=12.94$$

(2) $G(s)=\dfrac{30(s+b)}{s(s+10)}$

由题可得

$$D(s)=s(s+10)+30(s+b)=s^2+40s+30b=0$$

上式可等价表示为

$$1+G_2(s)=0$$

其中等效开环传递函数

$$G_2(s)=\frac{30b}{s^2+40s}=\frac{30b}{s(s+40)}$$

① 根轨迹的分支和起点与终点。由于 $n=2,m=0,n-m=2$,故根轨迹有两条分支,其起点分别为 $p_1=0,p_2=-40$,其终点都为无穷远处。

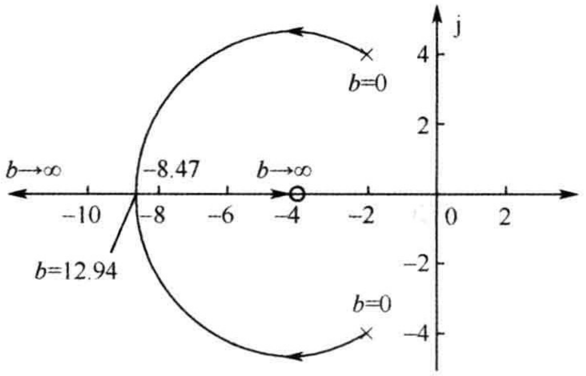

图 4-12-1　$1+\frac{b(s+4)}{(s+2+\mathrm{j}4)(s+2-\mathrm{j}4)}=0$

概略根轨迹图

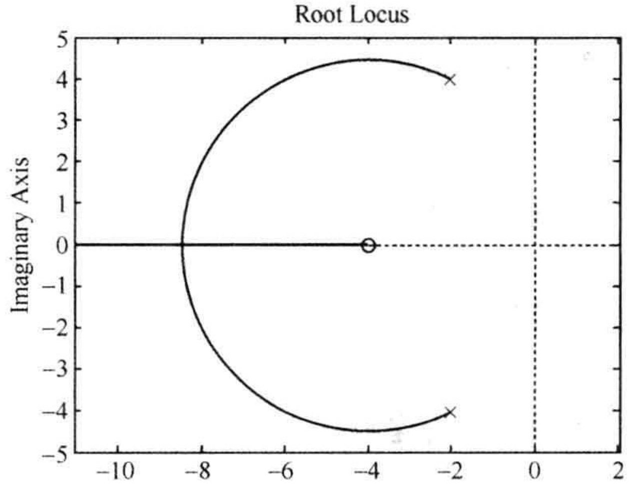

图 4-12-2　$1+\frac{b(s+4)}{(s+2+\mathrm{j}4)(s+2-\mathrm{j}4)}=0$

参数根轨迹图(MATLAB)

② 实轴上的根轨迹。实轴上的根轨迹分布区为[0,−40]。

③ 根轨迹的分离点。根轨迹的分离点坐标满足

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+40}=0$$

即 $2d+40=0$,解得

$$d=-20$$

根据以上分析,画出系统的闭环概略根轨迹如图 4-12-3 所示。其仿真图如图 4-12-4 所示。分离点 $d=-20$ 处的 b 值,可由模值条件求出为

$$30\,b=\prod_{i=1}^{2}|d-p_i|=400$$

$$b=13.33$$

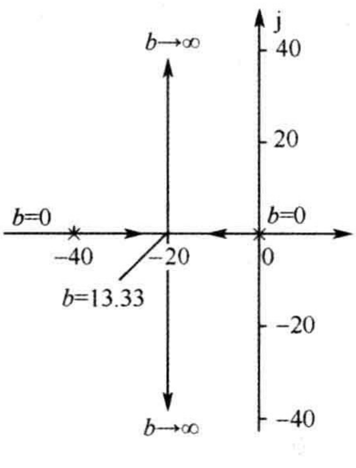

图 4-12-3　$1+\frac{30b}{s(s+40)}=0$

概略根轨迹图

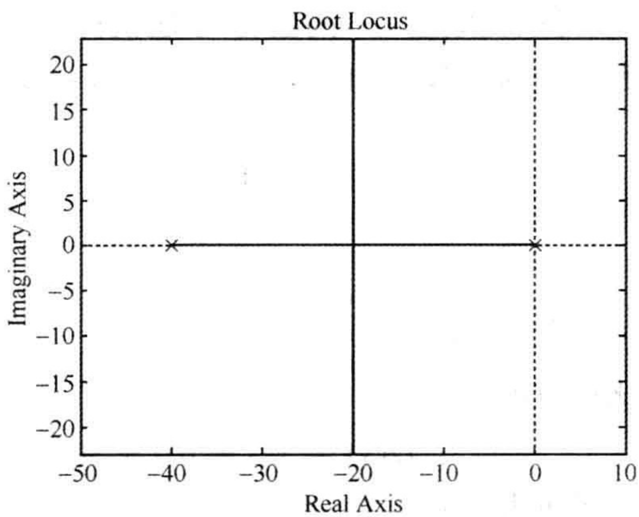

图 4-12-4　$1+\frac{30b}{s(s+40)}=0$

参数根轨迹图(MATLAB)